Экз по алгебре

1. Разложение по базису

Пусть есть три вектора: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

Требуется разложить $\vec{d}$ по трем векторам

$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$
$\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$
$\vec{c}(x_c, y_c, z_c)$
$\vec{d}(x_d, y_d, z_d)$

Составим и решим СЛУ

$$\begin{cases} \alpha x_a + \beta x_b + \gamma x_c = x_d \\ \alpha y_a + \beta y_b + \gamma y_c = y_d \\ \alpha z_a + \beta z_b + \gamma z_c = z_d \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} x_a & x_b & x_c & x_d \\ y_a & y_b & y_c & y_d \\ z_a & z_b & z_c & z_d \end{array}\right)$$

Среди коэффициентов, перебираем $\vec{d}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

! Можно в матричном виде

2. Собственные числа и собственные векторы матрицы

Пусть есть матрица (размер 3х3)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Чтобы найти свои числа (λ) решаем уравнение

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

I - единичная матрица

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$

Теперь из уравнения найдем λ

Для нахождения вектора решаем СЛУ $(A - \lambda I)x = 0$

Система СЛУ

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_2 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda_3 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получаем нетривиальный ответ (не нулевые корни)

Нормируем:

$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$ Выражаем из двух первых уравнений

$\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ Решение из третьего уравнения и нормируем

! не нормируем

— прочитать до конца

$\lambda_1 x_1 x_2 (1, 1, 2 y) \cdot x^{\lambda}$

1. $\{x_1 x_2\}$ вектор нормируем $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$ $x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. x_3 из второго уравнения
3. $\{x_1 x_2 x_3\}$ нормируем $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = 1$

$(1+1+2y)^2 = 1$ $\{1, 1, y\}$ $\sqrt{1^2 + 1^2 + y^2} = 1$

$(x_1 + x_2 + y x_3)^2 = 1$

$\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$
$x_1 = x_2 = x_3$
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x_1 = x_2 = x_3$ - уравнение нормирования
$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $x_1 = x_2 = x_3$ - уравнение нормирования
$\{(x_1 + x_2)^2 = 1$

Задачи на треугольник

1)

$S_{ABC} = \frac{1}{2}[\vec{a}, \vec{b}] = \frac{1}{2}|\vec{c}| \cdot h$

! Не забудьте на что пр. Пифа

$A\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}; \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$BH = \frac{2S_{ABC}}{a}$

2)

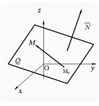
Расстояние от точки до плоскости

Если π: $Ax + By + Cz + D = 0$,
$\vec{n}(A, B, C)$
$A(x_1, y_1, z_1)$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{|\vec{n}|}$$

Ур-е плоскости через (1) $M(M_x, M_y, M_z)$ || $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

1) Выбираем произвольную точку $A(x, y, z)$ на плоскости
2) Ставим условие на вектор нормали $\vec{n} = (A, B, C)$
3) Вектор нормали вектор $\vec{AM}$
4) Получаем уравнение $\vec{n} \perp \vec{AM}$



Ур-е плоскости через (1) $M_1(M_x, M_y, M_z)$ || $\vec{a}(x_a, y_a, z_a)$ || $\vec{b}(x_b, y_b, z_b)$

1) Выбираем произвольную точку $A(x, y, z)$ на плоскости
2) Вектор нормали вектор $\vec{n} \perp \vec{a}$
3) Получаем ур-е на векторы $\vec{n} \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = 0$ и раскрываем через det

$$\begin{vmatrix} x - M_x & y - M_y & z - M_z \\ x_{a_1} & y_{a_1} & z_{a_1} \\ x_{a_2} & y_{a_2} & z_{a_2} \end{vmatrix} = 0$$

Ур-е плоскости через $M_1(M_{x_1}, M_{y_1}, M_{z_1})$ и $M_2(M_{x_2}, M_{y_2}, M_{z_2}) \perp \pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$\pi_1 - ?$

$\vec{n_1} \perp \vec{n_2} = 0$

$\overrightarrow{M_1M_2}(M_{x_2} - M_{x_1}, M_{y_2} - M_{y_1}, M_{z_2} - M_{z_1})$

$\vec{n_1} \perp \overrightarrow{M_1M_2} = 0$

$\vec{n_2} \perp \vec{n_1} = 0$

$$\vec{n_1} = [\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{n_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{M_2} - x_{M_1} & y_{M_2} - y_{M_1} & z_{M_2} - z_{M_1} \\ x_{n_2} & y_{n_2} & z_{n_2} \end{vmatrix} = (x, y, z, \vec{n})$$

$$x_{n_1}(x - x_{n_1}) + y_{n_1}(y - y_{n_1}) + z_{n_1}(z - z_{n_1}) = 0$$

Вектор, перпендикулярный двум данным с ним делит

$\vec{a} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$

$\vec{b} = D\vec{i} + E\vec{j} + F\vec{k}$

$|\vec{x}| = c$

$\vec{x} \perp \vec{a}$

$\vec{x} \perp \vec{b}$

1) Предположим $\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ × оси $\Rightarrow \beta = 0$
2) Составим СЛУ по условию задачи и решим

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = c \\ \alpha A + \beta C + \gamma C = 0 \\ \alpha D + \beta E + \gamma F = 0 \end{cases}$$

$\vec{x} \perp \vec{a}$

$\vec{x} \perp \vec{b}$

$\vec{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$

$\vec{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$

$\vec{x}(A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) = c$

$x = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$

1) Предположим $\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$
2) Составим СЛУ по условию задачи и решим

$$\begin{cases} \alpha A + \beta B + \gamma C = c \\ \alpha x_a + \beta y_a + \gamma z_a = 0 \\ \alpha x_b + \beta y_b + \gamma z_b \end{cases}$$

Ур-е плоскости L_1: $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$ || L_2: $\frac{x - x_2}{d} = \frac{y - y_2}{e} = \frac{z - z_2}{f}$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{x - x_1}{a} \\ t_1 = \frac{y - y_1}{b} \\ t_1 = \frac{z - z_1}{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_2 = \frac{x - x_2}{d} \\ t_2 = \frac{y - y_2}{e} \\ t_2 = \frac{z - z_2}{f} \end{cases}$$

$$(1)\begin{cases} x = a t_1 + x_1 \\ y = b t_1 + y_1 \\ z = c t_1 + z_1 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} x = d t_2 + x_2 \\ y = e t_2 + y_2 \\ z = f t_2 + z_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\vec{O_1}(a t_1 + x_1, b t_1 + y_1, c t_1 + z_1)$
$\vec{O_2}(d t_2 + x_2, e t_2 + y_2, f t_2 + z_2)$

$[\vec{n} \times \vec{O_1}] = 0$

$[\vec{n} \times \vec{O_2}] = 0$

$$[\vec{O_1} \times \vec{O_2}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_{O_1} & y_{O_1} & z_{O_1} \\ x_{O_2} & y_{O_2} & z_{O_2} \end{vmatrix} = 0$$

$\Leftarrow$

$A = ae$
$B = bd$
$C = bc$

$d = Ax + By + Cz + D$